

LA FORMA DE LA TORRE EIFFEL

Joseph Gallant

Kent State University, Ohio (USA)

La forma característica de la Torre Eiffel está basada en física sencilla y se ha diseñado de modo que el momento máximo creado por el viento sea compensado por el momento debido al peso de la Torre. Se usa esta idea para obtener una ecuación para la forma de la Torre. La solución depende sólo de la anchura de la base y de la presión máxima del viento. Se parametriza la presión del viento y se reproduce la forma de la Torre. También se discute algo sobre la interesante historia y las características de la Torre.

1. INTRODUCCIÓN

La Torre Eiffel es una de las estructuras más fácilmente reconocibles del mundo. Construida para la Exposición Universal de 1889 en conmemoración del centenario de la Revolución Francesa, se proyectó como un ejemplo de progreso y un logro de la ciencia y la tecnología del siglo XIX. Seleccionada por unanimidad entre 700 propuestas, los 300 metros de altura de la Torre simbolizaban ese progreso. Cuando fue inaugurada en marzo de 1889, la Torre Eiffel era la construcción más alta del mundo, y permaneció así hasta mayo de 1930, cuando se inauguró en Nueva York el Edificio Chrysler, con 77 plantas y 319 m de altura. (Un año más tarde, el Empire State Building, de 102 plantas y 381 m de altura superó el record y lo ostentó durante 41 años).

La Torre consta de cuatro patas arqueadas que se estrechan hacia dentro formando una sola columna que alcanza su máxima altura a 275 m (hay otros dos niveles a 57 y a 115 m). El nivel superior contenía unas habitaciones usadas por Eiffel, incluyendo una oficina donde recibió a Thomas Edison en 1899, una escalera de caracol y un mástil con bandera en el extremo, que llevó la altura inicial hasta los 312 metros. Construir tal torre presentaba retos importantes. Como el mismo Eiffel dijo, “¿A qué fenómeno debía darle principal importancia al diseñar la Torre? A la resistencia del viento. Bien, creo que la curvatura de los cuatro bordes exteriores del monumento, que son como los cálculos matemáticos han dictado que deben ser, darán impresión de gran intensidad y belleza”¹.

La Historia ha hecho valer la opinión de Eiffel y la mayoría de la gente ahora considera la Torre como una bella estructura, pero esta

opinión no fue siempre así. Incluso antes de que la Torre estuviera acabada, fue presentada una petición firmada por 300 importantes artistas (uno por cada metro de altura) ante el gobierno de la ciudad protestando por la “inutilidad y la monstruosidad de la Torre Eiffel”². Los firmantes usaron sarcásticamente el nombre de “Torre Eiffel” (Eiffel se refería a “la torre de 300 m”), pero el nombre tuvo efecto y hoy la Torre Eiffel es universalmente reconocida como el símbolo de París y actualmente decora los billetes franceses de 200 francos.

2. LA FÍSICA DE LA TORRE

La forma característica de la Torre se basa en la física básica y fue diseñada de modo que el máximo momento generado por el viento fuese compensado por el momento del peso de la Torre. La igualdad de los momentos permite calcular la curvatura de los bordes de forma que ofrezcan la más eficiente resistencia al viento. Cada borde de la Torre tiene forma tal que “la composición de la fuerza vertical del peso real de la Torre y la fuerza horizontal del viento den en cada nivel una fuerza dirigida exactamente a lo largo de la pata deseada”³. Para lograr este equilibrio, Eiffel tuvo que “construir las patas curvadas, de tal modo que las tangentes a ellas, dibujadas en puntos a la misma altura, se corten siempre en el punto por el que pasa la resultante de los esfuerzos del viento sobre la parte que está encima de los puntos en cuestión”⁴. En términos modernos, la condición de Eiffel dice que el momento debido al viento en cualquier parte de la Torre, desde una altura dada hasta la cima es igual al momento del peso de esa misma parte.

Como Eiffel explicó, “todas las fuerzas cortantes del viento pasan por el interior de las

patas principales. Las líneas tangentes a cada pata con el punto de tangencia a la misma altura, intersectarán siempre a un segundo punto, que es exactamente el punto por el que pasa el flujo resultante de la acción del viento sobre la parte del soporte de la Torre situada por encima de los dos puntos en cuestión. Antes de coincidir en la cúspide, las patas salen repentinamente del suelo, y de tal modo que son conformadas por la acción del viento”⁵.

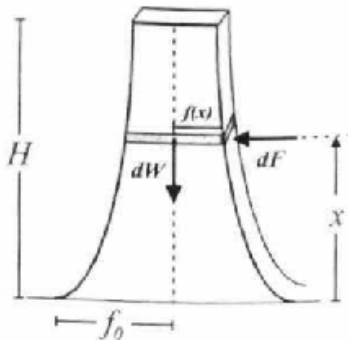


Figura 1

Nuestro objetivo es determinar la función matemática $f(x)$ que describe la forma de la Torre, expresando la mitad de la anchura como una función de la altura. La figura 1 muestra la situación física. Un viento horizontal presiona sobre el borde derecho de la Torre de altura H , creando un momento antihorario, mientras que el peso crea un momento en sentido horario. El punto respecto al que se toman los momentos es el punto de contacto entre el suelo y el borde izquierdo de la Torre. El sentido positivo de x es hacia arriba y el de $f(x)$ hacia la izquierda, o sea el habitual sistema de coordenadas XY girado 90° en sentido antihorario.

La rebanada de Torre a altura x con grosor dx tiene un peso proporcional a su volumen

$$dW = dm \cdot g = \rho [2f(x)]^2 dx \cdot g = 4\rho g f^2(x) dx$$

donde ρ es la densidad de la Torre y g es la aceleración debida a la gravedad. El brazo del peso es f_0 , la mitad de la anchura de la Torre en la base. La fuerza ejercida por el viento sobre cada rebanada es proporcional al área

$$dF = P \cdot 2f(x) dx$$

donde P es la máxima presión que la Torre puede soportar a altura x sin derrumbarse. El

brazo de la fuerza del viento es la altura a la que la fuerza actúa.

Aunque la forma de la Torre la determina el equilibrio de estos momentos, debe haber también otro momento en sentido horario debido, en última instancia, a las fuerzas del suelo sobre la Torre. La magnitud de este momento en la parte superior de la Torre debe ser proporcional a $(H - x)$, porque depende de cuánta Torre está sometida a la condición impuesta por Eiffel. El peso de la base no determina la forma de la Torre (una base suficientemente pesada equilibraría el efecto del viento para cualquier forma), pero la anchura de la Torre a una altura dada sí depende del tamaño de la base.

La condición de Eiffel se puede expresar como una ecuación integral⁶

$$\frac{1}{2} \int_x^H f^2(x) dx - cte \cdot (H - x) = \int_x^H xw(x)f(x) dx \tag{1}$$

donde la cantidad adimensional $w(x) \equiv P/(4\rho g f_0)$ es la presión máxima del viento, dependiente de la altura, que la Torre puede soportar sin caerse. El denominador de $w(x)$ es proporcional al tamaño de la sección eficaz de la base de la Torre y establece la escala del problema. La variación de $w(x)$ es debida a que tanto la densidad como la presión del viento pueden variar con la altura.

Si derivamos la ecuación (1) con respecto a x , encontramos

$$\frac{1}{2} f^2(x) - cte = xw(x)f(x) \tag{2}$$

La ecuación (2) con $x = 0$ muestra que la constante es $\frac{1}{2} f_0^2$, y la ecuación (2) pasa a ser

$$\frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} f_0^2 = xw(x)f(x) \tag{3}$$

Podemos usar ahora la fórmula de la ecuación de segundo grado para hallar $f(x)$. La Torre es más ancha en la base, por lo que tomamos la solución negativa

$$f(x) = xw(x) - \sqrt{x^2w^2(x) + f_0^2} \quad (4)$$

que proporciona la forma del borde derecho (negativo) de la Torre. El borde izquierdo (positivo) es $-f(x)$.

Todo lo que resta es especificar la presión máxima del viento $w(x)$ como una función de la altura. Según su definición y la anchura real de la Torre, esperamos que $w(x)$ sea del orden de la unidad. La forma más simple da la ecuación (4) incluye una presión constante del viento $w(x) = w_0$, que reproduce la forma general de la Torre pero no los detalles cuantitativos. La figura 2 muestra la función $f(x)$ para tres valores de w_0 y la forma real de la Torre. Cuando $w_0 = 0,700$, la función se ajusta a los datos a baja altura y es demasiado ancha cerca de la cima. La Torre puede presentar una gran sección eficaz para soportar una pequeña presión del viento. Cuando $w_0 = 1,33$, la función se ajusta a los puntos altos y es demasiado estrecha cerca de la base. La Torre debe presentar una pequeña sección eficaz para reducir el momento del viento. A la izquierda se muestra $w_0 = 1,00$, valor para el cual la función se ajusta a los datos a una altura intermedia.

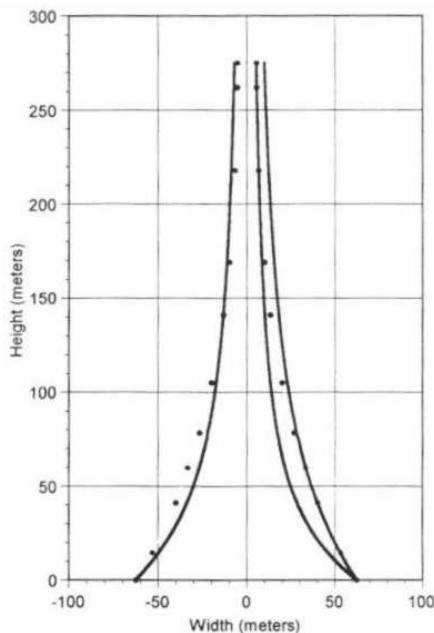


Figura 2

Estos resultados sugieren una presión del viento lentamente variable y que es pequeña a bajas alturas, aumentando en alturas intermedias y aproximándose a un alto valor constante cerca

de la cima. La fuerza (y el momento) del viento aumenta con la altura, pero la sección eficaz de la Torre disminuye. Podemos parametrizar esta presión máxima del viento usando la ecuación (4) para ajustar los datos de la Torre a un polinomio cúbico $w(x)$. La función obtenida

$$w(x) = 0,690 - 1,5310^{-3}x + 3,9610^{-5}x^2 - 9,2210^{-8}x^3$$

se muestra en la figura 3 y la forma resultante de la Torre se representa en la figura 4 junto a un dibujo de aquella con los mismos datos de la figura 2.

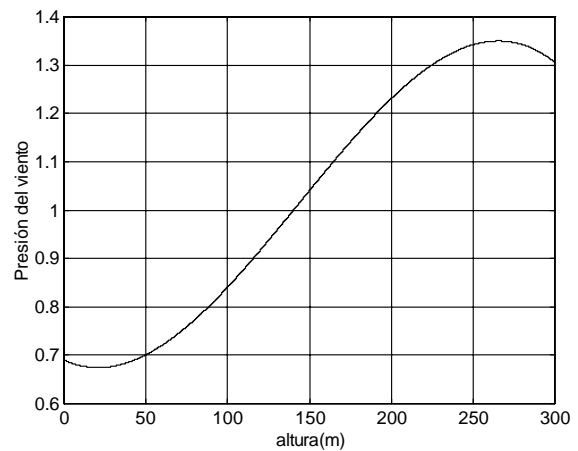


Figura 3

De haber diseñado la Torre de esta manera, Eiffel habría necesitado determinar $w(x)$. Antes de su trabajo de la Torre, Eiffel fue un brillante diseñador y constructor de puentes y el diseño de la Torre está basado en esta experiencia. Muchos de sus éxitos se debieron a su capacidad para calcular la resistencia del viento presentada por sus puentes de estructura metálica. Reconoció y resolvió el problema del viento hasta ser capaz de calcular con mucha exactitud la fuerza y presión del viento sobre una estructura de metal, y usó en la Torre las mismas técnicas que había perfeccionado en el diseño de puentes. Una vez que hubiese calculado las fuerzas y presiones debidas al viento, Eiffel podría determinar la presión adimensional $w(x)$.

La utilización de hierro forjado por parte de Eiffel en un diseño de entramado abierto proporcionó una estructura tan extremadamente

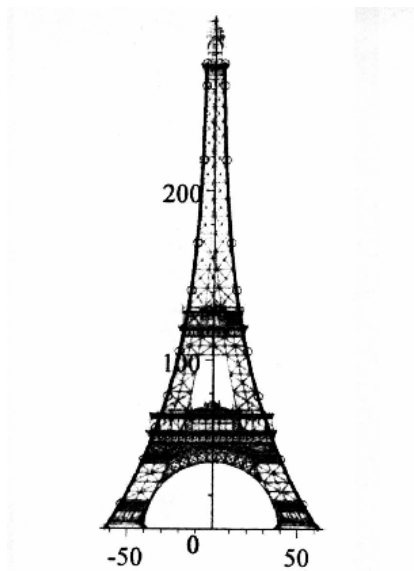


Figura 4

ligera que la Torre tenía aproximadamente el mismo peso que el aire que la rodeaba. La masa de aire en una caja lo suficientemente grande para contener la Torre ($125^2 \text{ m}^2 \times 312 \text{ m}$) es $6,28 \times 10^6 \text{ kg}$, lo que supone el 86,0% de los $7,30 \times 10^6 \text{ kg}$ de la Torre. El volumen de la Torre es

$$\int_0^H (2f(x))^2 dx = 7,25 \times 10^5 \text{ m}^3$$

y su densidad media es $10,1 \text{ kg/m}^3$, sólo 7,83 veces la densidad del aire.

En estos cálculos hemos considerado la Torre como un sólido rígido ideal que puede soportar una presión máxima del viento de aproximadamente $4\rho g f_0 w_{\text{máx}} \cong 33,3 \text{ kN/m}^2$ sin derrumbarse. Tal presión requeriría velocidades del viento superiores a ¡800 km/h! En 1999, los vientos más rápidos registrados en la cima de la Torre presentaron ráfagas de hasta 214 km/h, que pudieron producir presiones de hasta $2,28 \text{ kN/m}^2$ ⁷. Eiffel diseñó la Torre para soportar presiones del viento de $4,00 \text{ kN/m}^2$, un significativo margen de seguridad⁸. Debido a su diseño de entramado abierto y flexible (los vientos registrados producen oscilaciones de 9 cm), la Torre presenta sólo el 12,0% más de resistencia que nuestra estructura idealizada y la máxima presión del viento es

$$P(x) = 2\,970 \text{ N/m}^2 \times w(x).$$

3. CONCLUSIÓN

De acuerdo con los términos del contrato original, la Torre se estableció para mantenerse durante sólo 20 años; incluso hubo que pagar cuota de entrada. Para evitar la demolición, Eiffel demostró su utilidad en aerodinámica (instaló un túnel de viento en 1909 y pasó muchos años ocupado en experimentos de aerodinámica), meteorología (inicialmente había una estación en la cima de la Torre) y como torre de radio y telegrafía (astutamente interesó a los militares). El que millones de personas visiten anualmente todavía la Torre, tras cien años abierta, es un testimonio de la influencia y habilidad de Eiffel como ingeniero.

Tan pronto como se abrió la Torre en 1899, fue visitada por el Presidente de la República Francesa. Seguramente su interés motivó el que aparezcan los nombres de 72 científicos franceses permanentemente expuestos en el primer nivel. Algunos de los más famosos e importantes nombres en la historia de la Física y de las Matemáticas están allí, incluyendo a su abuelo Lázaro, recordado por sus trabajos en mecánica, ingeniería y geometría. Quizá el ver este nombre familiar expuesto en tal maravilla tecnológica trajo a la mente del Presidente el nombre de otro miembro de su familia, su tío (hijo de Lázaro) y famoso tocayo, el físico francés Sadi Carnot.

¹ Entrevista en el diario Le Temps (14 de febrero de 1887) en la que Eiffel responde a la protesta de los artistas (extraído de la excelente página web oficial de la Torre, www.tour-eiffel.fr).

² J. Harris, *The Tallest Tower: Eiffel and the Belle Epoch* (Regnery Gateway, Washington, 1975), p. 20.

³ B. Lemoine, *Gustave Eiffel* (L'Imprimerie Grafos, S.A., Arte sobre Papel, Barcelona, 1986), p. 89.

⁴ H. Loyrette, *Gustave Eiffel* (Rizzoli International, New York, 1985), p. 114.

⁵ Gustave Eiffel, *La Tour de Trois Cent Mètres* (Société des Imprimeries Le Mercier, Paris, 1900) (extraído de la web oficial de la Torre).

⁶ La "Ecuación de la Torre Eiffel", presentada sin resolver en www.users.imagnet.fr/chouard es esencialmente la ecuación (1) sin la corrección del momento nulo del viento a nivel del suelo.

⁷ Estas oscilaciones se miden mediante un sistema de alineamiento por láser en la cima de la torre y se exponen en tiempo real a los visitantes (extraído de la página web oficial de la Torre).

⁸ Dos excelentes páginas web sobre la Torre Eiffel son www.atkielski.com y www.endex.com/gf/buildings/eiffel.